Übungsblatt und Zusammenfassung zu Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Von drei Punkten zur Koordinatengleichung

---

1. Möglichkeit: Der Weg über den Normalenvektor

Beispiel 1. *Gegeben sind die drei Punkte $A(1|1|1)$, $B(1|2|-1)$ und $C(0|2|2)$, die zusammen die Ebene E aufspannen. Gib die Gleichung der Ebene E in Parameterdarstellung und in Koordinatendarstellung an.*

Lösung:

Parameterdarstellung: *Ortsvektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *Richtungsvektoren* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *und* $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

somit Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.   ⟹ siehe S. 179 f.

(Es gibt andere Möglichkeiten.)

Normalenvektor: *Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren*

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrolle: Prüfe mit dem Skalarprodukt, ob $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$. Wenn das nicht gilt, dann ist bei der Berechnung des Normalenvektors ein Fehler passiert.

Normalengleichung: $\underbrace{\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}}_{\text{Satz S. 181 !}}$, *einsetzen:* $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⟶ „*" bedeutet: Skalarprodukt!

Koordinatengleichung: *Rechne die Normalengleichung aus.* $3x + 2y + z = 6$

Endkontrolle: *Setze die drei Ausgangspunkte A, B und C in die Koordinatengleichung ein. Sie müssen die Gleichung erfüllen; wenn sie das nicht tun, dann ist unterwegs ein Fehler passiert.*

Aufgabe 1. *Verfahre mit den drei Punkten wie im Beispiel.*   ⟹ ·) Parameterdarstellung ·) Normalengleichung ·) Endkontrolle !

a) $A(2|3|1)$, $B(1|-1|1)$, $C(0|1|0)$

b) $A(-1|-1|1)$, $B(1|2|3)$, $C(-1|-1|-1)$

c) $P(0|4|0)$, $Q(1|2|1)$, $R(0|1|1)$

d) $P_1(1|0|2)$, $P_2(1|3|1)$, $P_3(-1|-2|0)$