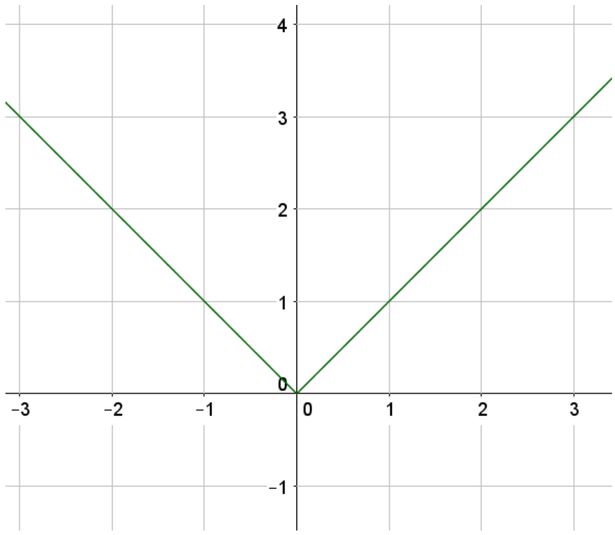
Der Absolutbetrag und Betragsungleichungen

Wiederholung 5.Klasse:

Der Absolutbetrag ist immer nicht-negativ:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Graph:



<u>Einfache Betragsungleichungen am Zahlenstrahl: den *Abstands*begriff verwenden:</u>

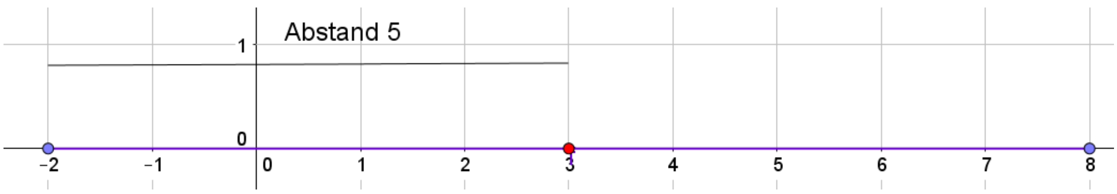
$|x|$ … Abstand von der Zahl x von der Zahl 0.

$|x - a|$ … Abstand der Zahl x von der Zahl a (ist dasselbe wie $|a - x|$)

$|x + a|$ … Abstand der Zahl x von der Zahl $(-a)$
(ist dasselbe wie $|x - (-a)|$ bzw auch $|a + x|$)

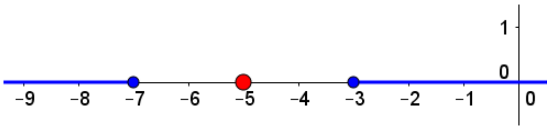
<u>Bsp.:</u> Was bedeutet also die Gleichung $|x - 3| < 5$?
→ Welche Zahlen x haben einen Abstand von der Zahl 3, der kleiner ist als 5?
→ $L = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x \wedge x < 8$ (kurz für $-2 < x < 8$) bzw. $L = (-2\,;\, 8)$.

Abbildung dazu:



Bsp.: Was bedeutet die Gleichung $|x + 5| \geq 2$? Ist das Gleiche wie $|x - (-5)| \geq 2$
→ Welche Zahlen x haben von der Zahl (-5) einen Abstand, der größer ist als 2?
→ $L = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -7 \;\vee\; x \geq -3 \}$ bzw. $L = (-\infty\,;\,-7] \cup [-3\,;\,\infty)$.

Abbildung dazu:



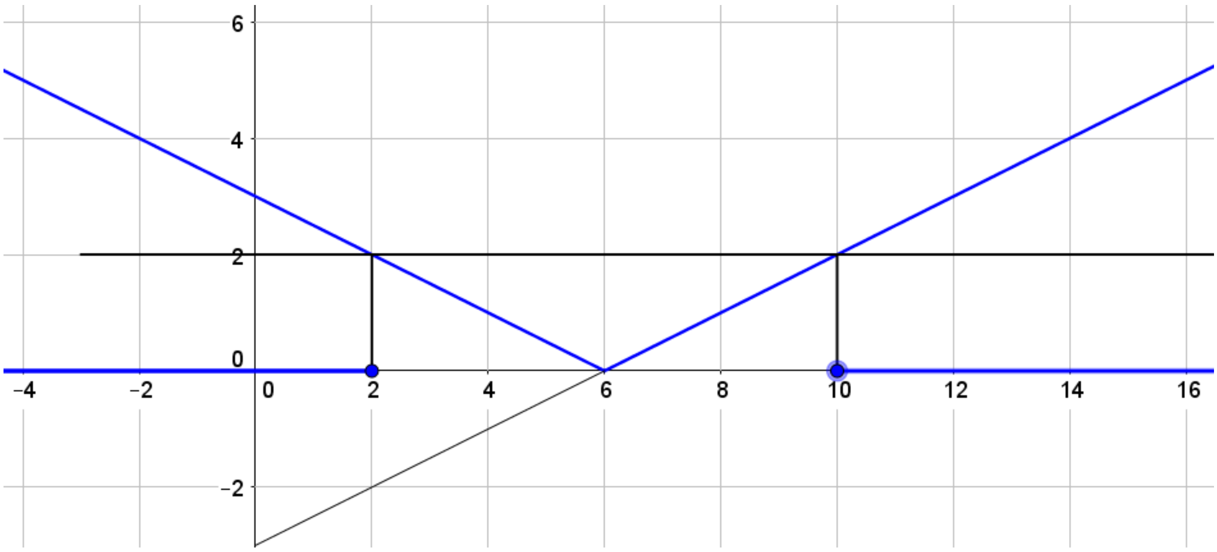
Neuer Stoff 6.Klasse:

Kompliziertere Ungleichungen lösen:

Graphisches Lösen:
Bsp.: $|\,0{,}5x - 3| \geq 2$

Interpretation als *Funktion* $f(x) = |0{,}5x - 3|$
→ ist wie die lineare Funktion $f(x) = 0{,}5x - 3$, außer dass nichts negativ werden darf (negativer Teil „klappt" / spiegelt sich über x-Achse nach oben).

Die Frage ist also: wo sind die *Funktionswerte* ≥ 2?



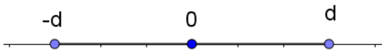
Man sieht aus der Abbildung:
$L = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2 \;\vee\; x \geq 10\}$ bzw. $L = (-\infty\,;\,2] \cup [10\,;\,\infty)$.

Rechnerisches Lösen:
Ausgangspunkt:

$\underline{|x| < d}$ bedeutet: Welche Zahlen x haben von 0 den Abstand der *kleiner* ist als d?

Alle Zahlen zwischen $-d$ und $+d$. Also: $L = \{ x \in \mathbb{R} \mid -d < x \wedge x < d \}$, kurz $L = \{ x \in \mathbb{R} \mid -d < x < d \}$, bzw. $L = (-d\,;\, d)$.

Abbildung:



Das kann man übertragen auf kompliziertere Beispiele:

Bsp.: $| 3x - 5 | < 2$ entspricht:

$-2 < 3x - 5 < 2$ $\quad |+5$

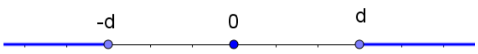
$3 < 3x < 7$ $\quad |:3$

$1 < x < \frac{7}{3}$

$L = \left(1\,;\, \frac{7}{3}\right)$

$\underline{|x| > d}$ bedeutet: Welche Zahlen x haben von 0 einen Abstand, der größer ist als d?

Abbildung:



Also alle x, die entweder kleiner sind als $-d$, bzw. größer als $+d$.
Also $L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -d \vee x > d \}$ bzw. $L = (-\infty\,;\, -d) \cup (d\,;\, \infty)$.

Auch das kann man wieder auf komplizierte Beispiele anwenden:

Bsp.: $|0{,}5x - 4| \geq 2$:

$0{,}5x - 4 \leq -2 \quad \vee \quad 0{,}5x - 4 \geq 2 \quad |+4$

$0{,}5x \leq 2 \quad \vee \quad 0{,}5x \geq 6 \quad | : (0{,}5)$

$x \leq 4 \quad \vee \quad x \geq 12$

Also: $L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \vee x \geq 12 \}$ bzw. $L = (-\infty\,;\, 4] \cup [12\,;\, \infty)$.