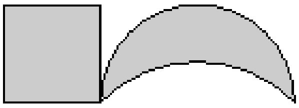
Integration - Motivation

Worum geht es?

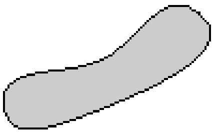
Dieser Artikel beschäftigt sich mit dem Thema Integration ("Wozu braucht man das eigentlich?"). Methoden zur Berechnung von Integralen finden Sie hier.

Integration - wozu?

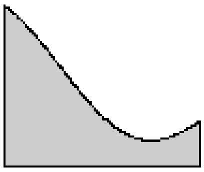
Der Flächeninhalt "einfacher" Flächen, wie zum Beispiel Quadrate, Kreise, Dreiecke usw. lässt sich relativ einfach mit wohlbekannten Formeln berechnen. Damit kann man auch Flächeninhalte von Figuren, die aus mehreren Quadraten, Kreise, Dreiecke usw. zusammengesetzt sind, bestimmen, wie zum Beispiel:



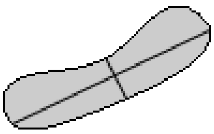
Was ist aber nun mit nicht durch Kreise und Geraden begrenzten Flächen, wie etwa folgender:



Offenbar ist es als erster Schritt hilfreich, Flächen der Form

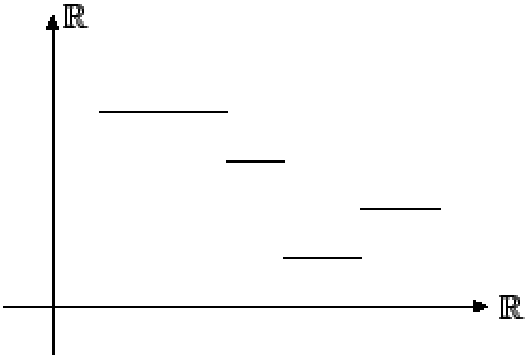


zu betrachten, da sich die obige Fläche in Teilstücke dieses Typs zerlegen lässt, etwa so:

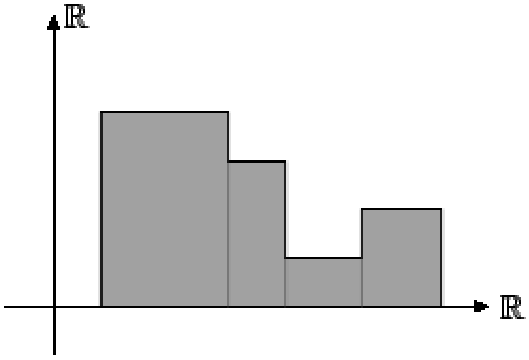


Solche Flächen können wir als Flächen unter dem Graphen einer nicht-negativen Funktion auffassen. In diesem Artikel wollen wir uns mit der Lösung dieses Problems befassen:

Betrachten wir zunächst einmal eine Funktion von sehr einfacher Form, für die unser Problem offenbar zu lösen ist, eine so genannte Treppenfunktion:



Für solche Funktionen ist es offensichtlich leicht, den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen zu berechnen, sie setzt sich aus "Rechtecktürmchen" zusammen:



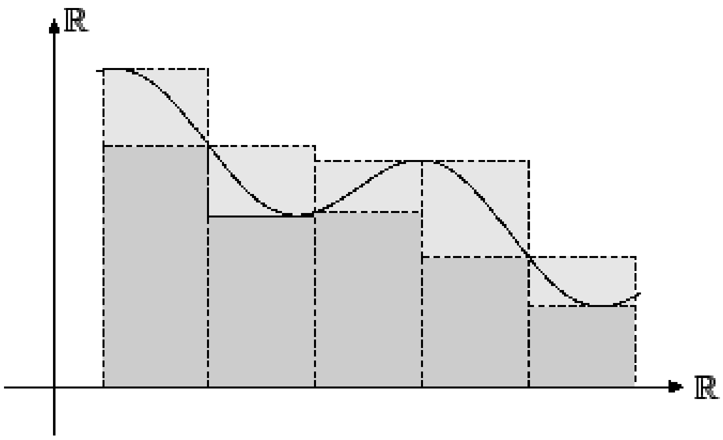
Der Flächeninhalt der Gesamtfläche ist dann die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke, also gerade

$$c_1 \cdot \Delta x_1 + c_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + c_n \cdot \Delta x_n$$

wobei Δx_i die Länge der Abszissenabschnitte bezeichne, c_i die Höhe der Türmchen. Gut, aber das hätten wir auch schon vorher gekonnt. Wenn wir nun aber eine allgemeine Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

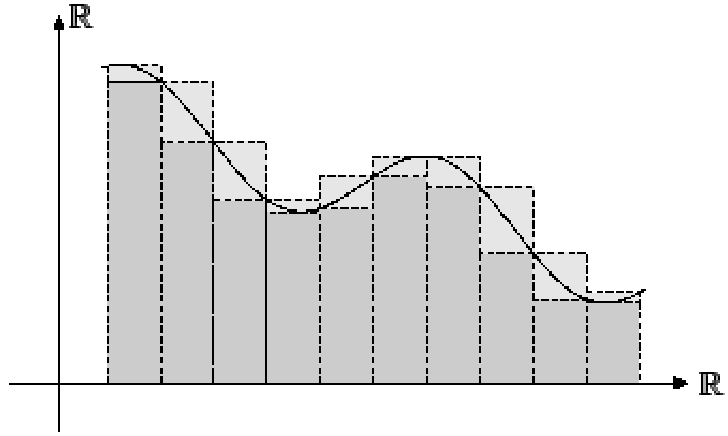
betrachten, so können wir unser Wissen über Treppenfunktionen anwenden, um die gesuchte Fläche zu approximieren: Unterteilen wir nämlich unser Grundintervall durch Wahl einiger Unterteilungspunkte und betrachten wir dann auf den sich ergebenden Teilintervallen die jeweils minimalen und maximalenFunktionswerte, so haben wir die gesuchte Fläche von innen und von außen durch folgende Türmchenflächen eingeschachtelt (die Gesamtfläche der großen Türme heißt Obersumme, die der kleinen Türmchen Untersumme):



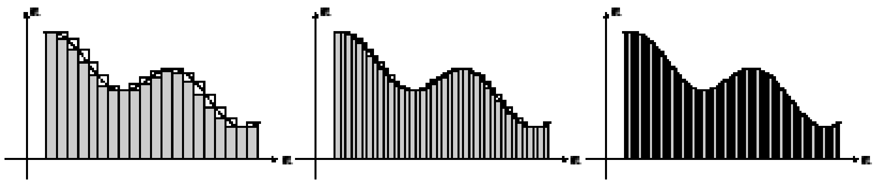
Offensichtlich ist

$$\text{Untersumme} \leq \text{Fläche unter } f \leq \text{Obersumme}$$

Verkleinern wir nun die Unterteilungsintervalle, so erhalten wir eine neue Ober- und eine neue Untersumme, dabei wird die Approximation der gesuchten Fläche besser:



Durch fortgesetzte Unterteilung können wir unsere Approximation verbessern, wie folgende Bilder zeigen:



Wir erhalten nun für jede Anzahl n von Unterteilungsintervallen eine Obersumme und damit eine Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Obersummen und auf gleiche Weise eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Untersummen. Für die zu berechnende Fläche I gilt hierbei für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n \leq I \leq O_n$$

Konvergieren nun $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert L, so gilt $I = L$, wir haben also unseren Flächeninhalt I berechnet. Dabei ist man nicht an eine bestimmte "Strategie" der Unterteilung gebunden, meistens wird man jedoch das Intervall in Teile gleicher Länge zerlegen. Manchmal kann es aber hilfreich sein, eine andere Unterteilung zu wählen.