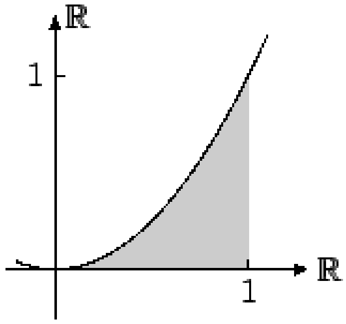
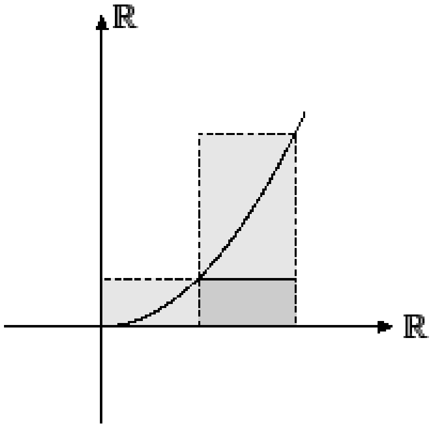
Beispiel

Wir wollen den Flächeninhalt unter der Normalparabel über dem Intervall $[0,1]$ berechnen, also folgende Fläche:



Wir betrachten die durch $f:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$ gegebene Funktion. Als ersten Schritt wollen wir zunächst einmal einige Ober- und Untersummen berechnen: Unterteilen wir unser Intervall in zwei Teile der Länge $\frac{1}{2}$,



so sind im ersten Teilintervall die extremalen Funktionswerte

$$f(0)=0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

und im zweiten

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}, \quad f(1)=1$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2}\cdot f(0)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2 &= \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot f(1) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

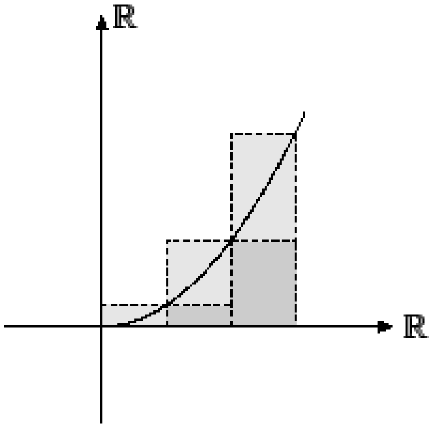
als Ober- bzw. Untersumme. Damit haben wir als erste Approximation für unsere gesuchte Fläche

$$\frac{1}{8} \leq I \leq \frac{5}{8}$$

oder

$$0{,}125 \leq I \leq 0{,}625$$

Dies ist offensichtlich nur eine erste Approximation für den gesuchten Wert. Als nächsten wollen wir O_3 und U_3 berechnen, wir unterteilen also unser Intervall in drei Teile



Die extremalen Werte der Funktion auf den Teilintervallen liegen wieder am Rand des jeweiligen Intervalls, da f eine monotone Funktion ist. Die Extremalwerte auf den jeweiligen Intervallen sind

$$0, \frac{1}{9} \quad \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \quad \frac{4}{9}, 1$$

Damit haben wir als Unter- und Obersumme

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \\ &= \frac{5}{27} \\ O_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{14}{27} \end{aligned}$$

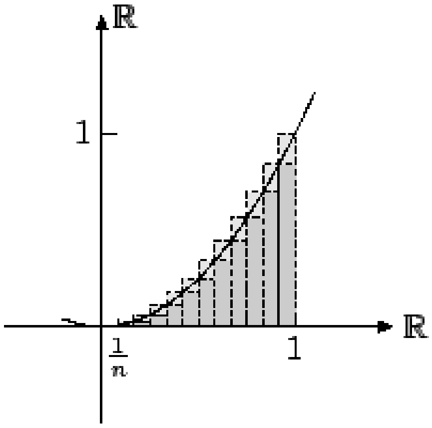
Als zweite Approximation für den gesuchten Flächeninhalt ergibt sich

$$\frac{5}{27} \leq I \leq \frac{14}{27}.$$

oder approximativ

$$0{,}185 \leq I \leq 0{,}519$$

Nun wollen wir Ober- und Untersummen für allgemeines n berechnen, dazu unterteilen wir also zunächst das Intervall $[0, 1]$ durch $n - 1$ äquidistante Punkte, so dass wir n Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ haben:



Wir erhalten für die Obersumme

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Länge des } i\text{-ten Teilintervalls}} \cdot \underbrace{\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}_{\text{Höhe des } i\text{-ten Turms}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+\frac{1}{2}}{n} \end{aligned}$$

und als Untersumme ergibt sich

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Länge des } i\text{-ten Teilintervalls}} \cdot \underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)^2}_{\text{Höhe des } i\text{-ten Turms}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n(n-1)(2n-1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-\frac{1}{2}}{n} \end{aligned}$$

Nun haben wir die Folge der Ober- und der Untersummen auf Konvergenz zu untersuchen (mehr zu Grenzwerten von Folgen finden Sie hier), es ist

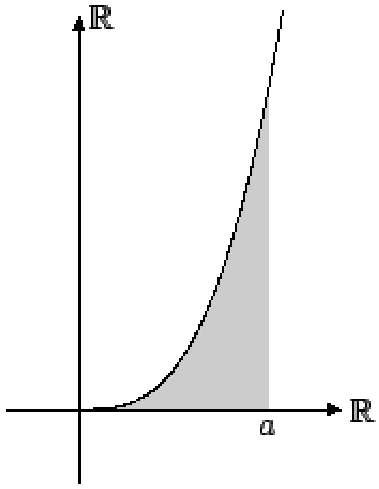
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} U_n &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-\frac{1}{2}}{n} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

und

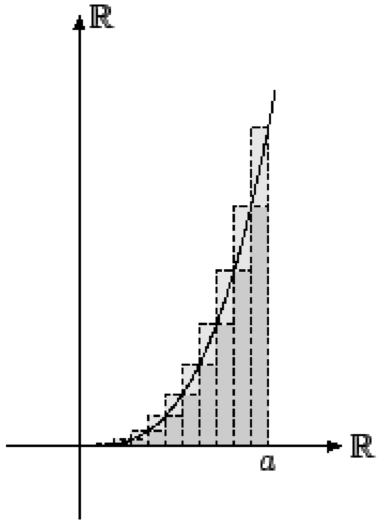
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} O_n &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+\frac{1}{2}}{n} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt ist also $\frac{1}{3}$.

Als weiteres Beispiel wollen wir nun die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f:[0,a]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^3$ berechnen, wobei a eine beliebige positive reelle Zahl sei.



Zunächst unterteilen wir also $[0,a]$ wieder äquidistant



und berechnen dann die Ober- und Untersummen. Wir erhalten hier

$$\begin{aligned}U_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a}{n}\cdot\left(i\cdot\frac{a}{n}\right)^3 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a^4}{n^4}\cdot i^3 \\ &= \frac{a^4}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\ &= \frac{a^4}{n^4}\cdot\frac{1}{4}\cdot n^2(n-1)^2 \\ &= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2}\end{aligned}$$

als Untersumme und

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a}{n} \cdot \left((i+1) \cdot \frac{a}{n}\right)^3 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^4}{n^4} \cdot (i+1)^3 \\ &= \frac{a^4}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^3 \\ &= \frac{a^4}{n^4} \cdot \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{a^4}{4} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

als Obersumme. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{a^4}{4} = \lim_{n\to\infty} U_n$$

die gesuchte Fläche ist also $\frac{a^4}{4}$.

"Integral"

Da Flächen unter Funktionsgraphen, wie eingangs erläutert, eine zentrale Rolle bei der Berechnung krummlinig berandeter Flächen spielen, hat man einem solchen Flächeninhalt einen eigenen Namen gegeben, der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der Abszissenachse heißt *Integral von f über* $[a, b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet. Wir können die Ergebnisse unserer beiden Beispiele also auch als

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^a x^3\,dx = \frac{a^4}{4}$$

notieren.

Wir haben nun also eine Methode gefunden, den Flächeninhalt des Archetyps einer krummlinig begrenzten Fläche zu berechnen. Man unterteile das Intervall, berechne Ober- und Untersummen und gehe zum Grenzwert über. Dies ist aber im Allgemeinen kein gangbares Verfahren, oft kann man den Grenzwert der Ober- und Untersummen nicht oder nur mit sehr großem Aufwand bestimmen.