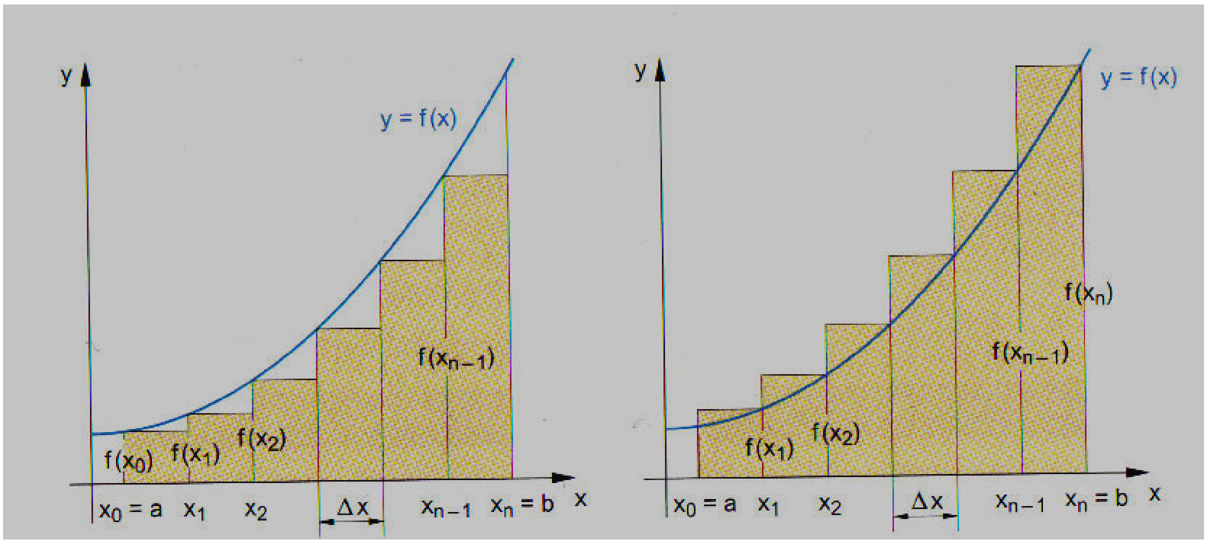
Integralrechnung

1.1 Allgemein

Die Berechnung von Bogenlängen, Schwerpunkten und Trägheitsmomenten, der Arbeit und des Effektivwertes eines elektrischen Wechselstromes, der Bahnkurven von Satelliten, des Zeitverhaltens von Schwingungen oder der Zuverlässigkeit von Bauteilen kann mit Hilfe der Integralrechnung erfolgen. Alle diese Fragestellungen lassen sich auf eine Grundaufgabe zurückführen: die Bestimmung des Flächeninhaltes von krummlinig begrenzten Flächen. Dabei zeigt sich die überraschende Tatsache, dass die Integralrechnung direkt auf die Umkehrung des Differenzierens führt.



Untersumme **Obersumme**

Bsp.: Unter- Obersumme für die Funktion f(x)=(x^2)/2:

Breite der Teilintervalle: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

Untersumme: $U_n = \Delta x * [f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})]$

$$= \frac{1}{2}[f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) * f(\frac{3}{2})]$$

$$= \frac{1}{2}[0{,}5 * 0^2 + 0{,}5 * 0{,}5^2 + 0{,}5 * 1^2 + 0{,}5 * 1{,}5^2] = 0{,}875$$

Obersumme: $O_n = \Delta x * [f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$

$$= \frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) * f(2)]$$

$$= \frac{1}{2}[0{,}5 * 0{,}5^2 + 0{,}5 * 1^2 + 0{,}5 * 1{,}5^2 + 0{,}5 * 2^2] = 1{,}875$$

1.2 Bestimmtes Integral

Es sei y = f(x) eine Funktion, die auf dem Intervall [a, b] definiert und beschränkt ist.
Man zerlegt nun das Intervall [a, b] in n gleich breite Teilintervalle und bildet für diese Zerlegung die Obersumme O_n und die Untersumme U_n.
Existiert dann für n ⟶ ∞ sowohl der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} U_n$ der Folge der Untersumme als auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} O_n$ der Folge der Obersumme und stimmen diese Grenzwerte überein, so heißt die Funktion y = f(x) integrierbar auf [a, b].
Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Integral von y = f(x) auf [a, b] genannt.

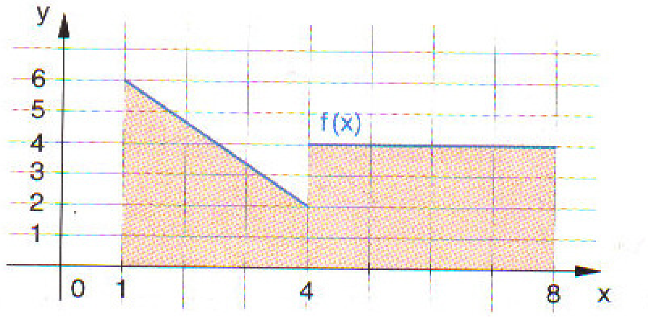
Man schreibt: $\int_a^b f(x)\;dx = \lim_{n\to\infty} U_n \;(= \lim_{n\to\infty} O_n).$

Bezeichnungen: **f(x) ....Integrand**
x ....Integrationsvariable
a, b ....untere bzw. obere Integrationsgrenze
[a, b] ....Integrationsintervall

Anmerkung:

- Integrierbar sind, was nicht weiter begründet wird, vor allem die stetigen Funktionen und auch die stückweise stetigen Funktionen. Für die Integrierbarkeit einer Funktion bestehen weniger strenge Forderungen als für die Differenzierbarkeit.
- Geometrische Deutung: Das bestimmte Integral von y = f(x) auf [a , b] ist der orientierte Flächeninhalt der fLäche zwischen dem Graphen von y = f(x) und der x-Achse von x = a bis x = b.
- Ist eine Funktion y = f(x) integrierbar, kann nach einer Zerlegung des Integrationsintervalles in n Teilintervalle jeder Funktionswert in einem Teilintervall als Höhe eines Rechtecks genommen werden: stets erhält man im Grenzfall n ⟶ ∞ als Grenzwert $\int_a^b f(x)\;dx.$
- In der Formulierung als Grenzwert der Untersummen gilt: $\int_a^b f(x)\;dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$. Daraus leitet sich historisch die Schreibung eines bestimmten Integrals her. Das Integralzeichen $\int$ ist ein in die Länge gezogenes S; es erinnert, dass das Integral der Grenzwert einer Summe ist.
- Die Integrationsvariable kann beliebig bezeichnet werden: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u) = ...$
- Das bestimmte Integral ist als Grenzwert einer Produktsumme definiert (woraus sich die geometrische Deutung als Flächeninhalt ergibt). Viele physikalische Größen werden als solche Grenzwerte und damit als Integrale definiert.
- Das besprochene Integral, das so genannte RIEMANN – Integral, ist der einfachste, aber für die Anwendung wichtigste Integralbegriff. Es gibt noch andere Integrallbegriffe.

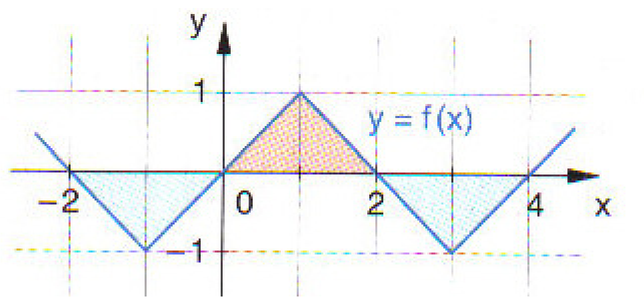
1.3 Stückweise Integration



Stückweise Integration nach Zerlegung des Integrationsintervall:

Für a < c < b gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

1.4 Bestimmtes Integral als Summe von orientierten Flächeninhalten



- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$ // Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Im Überblick:

1. Es sei U_n die Untersumme und O_n die Obersumme einer Funktion y = f(x) für eine Zerlegung des Intervalls [a , b] in n gleich breite Teilintervalle. Existieren dann die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ und stimmen sie überein, so heißt die Funktion integrierbar. De gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Integral von y = f(x) auf dem Intervall [a , b] genannt.
   y = f(x) heißt Integrand, x Integrationsvariable, a und b sind die Integrationsgrenzen.

2. Geometrische Deutung: Das bestimmte Integral ist gleich dem (orientierten) Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse.

3. Stetige oder stückweise stetige Funktionen sind integrierbar.

4. Stückweise Integration bei einer Zerlegung des Integrationsintervalles [a , b]:

   Ist a < c < b, so gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

5. Vereinbarungen: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ sowie $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

1. 5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1.5.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation. F(x) ist die Stammfunktion von f(x), wenn F'(x)=f(x). Außerdem besitzt eine Funktion unendlich viele Stammfunktionen.

Bsp.: Ermittle eine Stammfunktion von $f(x)=x^3+2x^2+1$

$$f(x)= x^3+2x^2+1 \quad \underset{\text{differenzieren}}{\overset{\text{integrieren}}{\rightleftarrows}} \quad f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x + C$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f(x) wird als unbestimmtes Integral der Funktion f(x) bezeichnet.

Schreibweise: $\int f(x)dx = F(x) + C$

f(x) → Integrand
x → Integrationsvariable
C → Integrationskonstante

Die Integrationskonstante darf bei einem unbestimmten Integral nicht weggelassen werden. Gibt man C einen Wert, so bekommt man die zu dieser Konstante gehörige Stammfunktion.

Die Probe für die unbestimmte Integration lautet: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Bsp.: Ermittle das unbestimmte Integral.

$$\int (x^6 + x^2 - \sqrt[3]{x}) \cdot dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C$$

1.5.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn man eine stetige Funktion f(t) hat dann gilt:

a.) Die Funktion $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist die Stammfunktion von f(t). A'(x)=F(x).

b.) Wenn F(x) eine beliebige Stammfunktion von f(t) ist dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Jede Flächenfunktion A(x) ist eine Stammfunktion und kann durch Integrieren ermittelt werden.

Existiert keine Stammfunktion von f(x), (kommt bei stetigen Funktionen vor), oder wenn die Stammfunktion nicht ermittelt werden kann verwendet man zur Berechnung des bestimmten Integrals numerische Methoden.

Bsp.:

$$\int_{-2}^{3} (2x^2 - 3)dx = \int_{-2}^{3} 2x^2 dx - \int_{-2}^{3} 3dx = 2\int_{-2}^{3} x^2 - 3\int_{-2}^{3} 1dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} - 3 \cdot [x]_{-2}^{3} + C =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] - 3 \cdot [3 - (-2)] + C$$

$$= 2 \cdot \left[9 + \frac{8}{3}\right] - 15 + C$$

$$= 2 \cdot \frac{35}{3} - 15 + C = \frac{70}{3} - \frac{45}{3} + C = \frac{25}{3} + C$$

1.6 Grundintegrale

Man kann eine Integrationsaufgabe kaum direkt mit Hilfe der Grundintegrale lösen, jedoch bilden sie einen guten Ausgangspunkt für das praktische Rechnen. Weitere Grundintegrale finden sie auf der Formelsammlung.