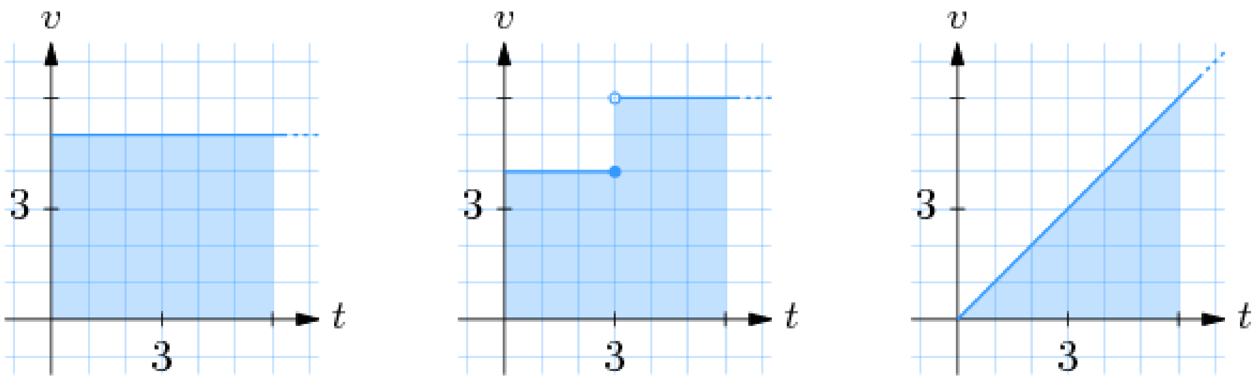
A - Die Fläche unter einer Kurve

Wir haben im vorigen Abschnitt die Ableitung von Funktionen studiert und viele interessante Eigenschaften der Ableitung gefunden. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Fläche zwischen der *x*-Achse und dem Schaubild einer Funktion viele wichtige Eigenschaften und Anwendungen hat.

Wenn wir zum Beispiel die Geschwindigkeit eines Objektes in einen *v*-*t*-Graph einzeichnen, können wir die drei unten dargestellten Fälle erhalten:



Das Objekt bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit 5.

Das Objekt bewegt sich zuerst mit der Geschwindigkeit 4 bis zur Zeit $t = 3$, wo es plötzlich die Geschwindigkeit 6 erhält.

Die Geschwindigkeit wächst linear.

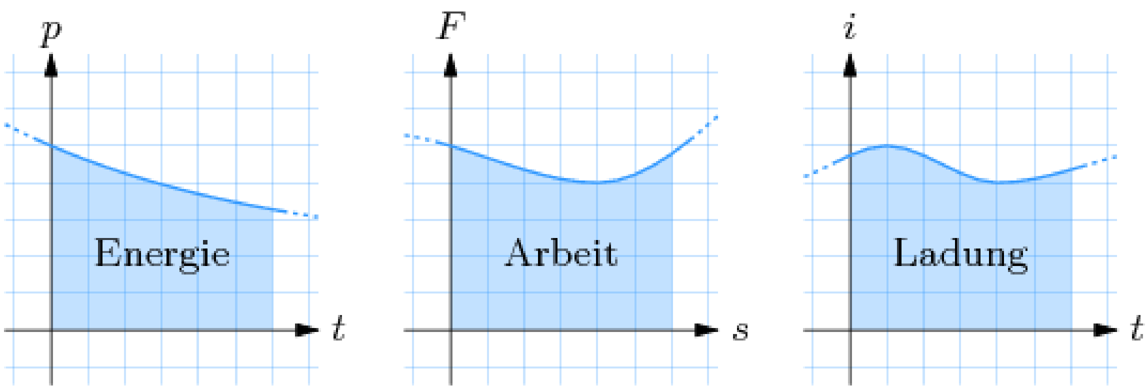
Die vom Objekt zurückgelegte Strecke ist in den drei Fällen:

$$s(6) = 5 \cdot 6 = 30\,\text{m}, \quad s(6) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 30\,\text{m}, \quad s(6) = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\,\text{m}.$$

In allen drei Fällen sehen wir, dass die zurückgelegte Strecke der Fläche unter dem Graph der Funktion entspricht.

Hier werden noch einige Beispiele gezeigt, was die Fläche unter einem Graph bedeuten kann.

Beispiel 1



Eine Solarzelle mit der Leistung p liefert die Energie, die proportional zur Fläche unter dem Graph ist.

Die Kraft *F* die entlang einer Strecke wirkt, leistet die Arbeit, die proportional zur Fläche unter dem Graph ist.

Ein Kondensator, der mit dem Strom *i* geladen wird, enthält eine Ladung, die proportional zur Fläche unter dem Graph ist.

B - Die Bezeichnung des Integrals

Um die Fläche unter einer Kurve zu beschreiben verwendet man das *Integralzeichen* $\int$.

Das Integral einer positiven Funktion $f(x)$ von a bis b ist dasselbe wie die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse und zwischen zwei Vertikalen den Geraden $x = a$ und $x = b$ und wird wie folgt geschrieben:

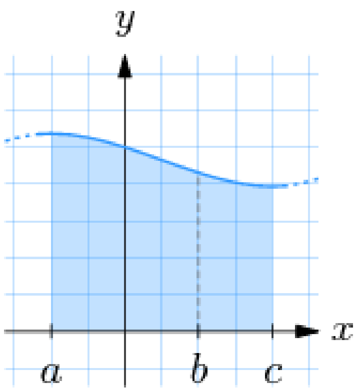
$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Die Zahlen a und b nennt man Integrationsgrenzen. Die Funktion $f(x)$ nennt man Integrand und x nennt man die Integrationsvariable.

Beispiel 2

Die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = c$ ist genauso groß wie die Fläche von $x = a$ bis $x = b$ plus die Fläche von $x = b$ bis $x = c$. Dies bedeutet, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx\,.$$

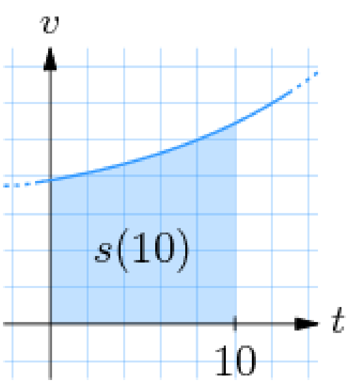


Beispiel 3

Sei $v(t)$ die Geschwindigkeit eines Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit t. Die Strecke, die nach 10 s zurückgelegt wurde, ist gleich der Fläche unter dem Schaubild von $v(t)$ zwischen 0 und 10, also gleich dem Integral von 0 bis 10.

$$s(10) = \int_0^{10} v(t)\,dt\,.$$

Hinweis: Wir nehmen hier an, dass Geschwindigkeit und Strecke mit derselben Längeneinheit gemessen werden.



Beispiel 4

Wasser fließt in einen Tank mit der Geschwindigkeit $f(t)$ Liter/s zur Zeit t. Das Integral

$$\int_9^{10} f(t)\,dt$$

beschreibt, wie viel Wasser während der zehnten Sekunde in den Tank fließt.